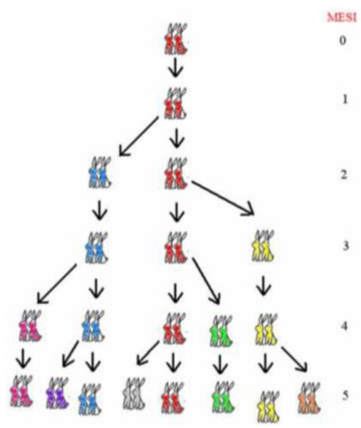
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, … Questa successione in cui ogni numero è ottenuto dalla somma dei due numeri che lo precedono, prende il nome da Leonardo Pisano detto Fibonacci (1175-1240), matematico del XIII secolo. Il padre era un mercante che aveva continui contatti con le popolazioni dell'Africa settentrionale, così Leonardo ebbe modo di viaggiare in Egitto, Siria, Grecia e di conoscere i più importanti matematici arabi e di apprendere l'algebra e il sistema di notazione indo-arabico che è arrivato sino a noi. Nel 1202 scrisse il Liber Abaci, opera che fece scoprire all'Europa il sistema di notazione indo-arabo, la numerazione decimale e lo zero – o zefr, dall' arabo zefiro – cioè numero vuoto come il "soffio di vento" che, spostando le cifre come il vento sposta le cose, ne cambia il valore pur nella sua inconsistenza. The Fibonacci series arose from a Liber Abaci problem: "How many pairs of rabbits do you get in a year, except in cases of death, assuming that each pair gives birth to another pair every month and that the youngest pairs are able to reproduce as early as the second month of life?"

The answer is as follows: at the end of the first month, you have the first pair; at the end of the second month, you have the original pair and a new pair generated by it; at the end of the third month, a third pair is added; at the end of the fourth month, you have 5 pairs, because the second pair has also begun to generate, and so on:



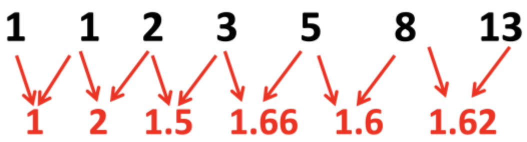
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765 \ldots$

La successione di Fibonacci possiede molte proprietà eleganti e significative.
Vediamone alcune:

- Due termini successivi qualsiasi sono primi tra loro e il loro massimo comun divisore è uguale a 1.
- Un qualsiasi numero della successione elevato al quadrato è uguale al prodotto tra il numero che lo precede e quello che lo segue, aumentato o diminuito di un'unità.

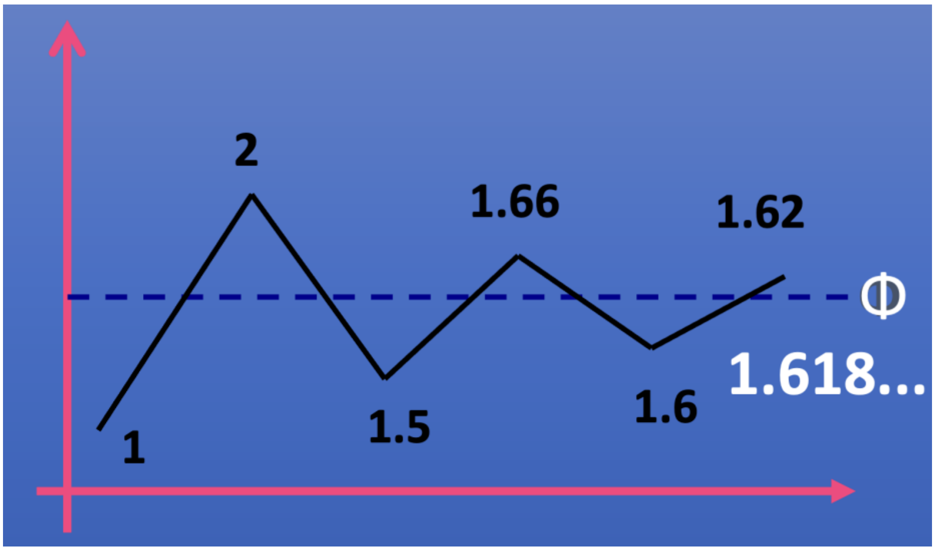
Per esempio $21^2 = 441 = 13 \times 34 - 1$
mentre $89^2 = 7921 = 55 \times 144 + 1$

- La successione formata dai rapporti fra due termini consecutivi della successione di Fibonacci è una successione i cui primi termini sono:



$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{5}$	$\frac{13}{8}$	$\frac{21}{13}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{55}{34}$	$\frac{89}{55}$	$\frac{144}{89}$	....
1	2	1,5	1,666	1,6	1,625	1,615	1,619	1,617	1,61818	1,6179	...

Il limite esatto di questa successione è Il "numero aureo" o "rapporto aureo" che è conosciuto fin dall'antichità per le sue curiose caratteristiche e viene indicato con la lettera greca φ (phi) in onore di Fibonacci. È un numero irrazionale: le sue cifre decimali continuano all'infinito senza un apparente schema! Il "rapporto aureo" e fu chiamato da Leonardo da Vinci "divina proporzione".



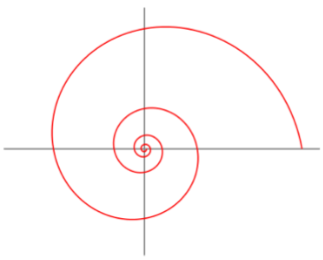
SPIRALI E NUMERI DI FIBONACCI

I numeri della famosa successione di Fibonacci 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 possono essere usati per tracciare opportuni quadrati come in figura: questo insieme di rettangoli, i cui lati hanno lunghezze pari a numeri di Fibonacci successivi e che sono composti da quadrati con lati che sono numeri di Fibonacci, sono chiamati rettangoli di Fibonacci. Tracciando in ogni quadrato un quarto di circonferenza si ottiene la spirale di Fibonacci, che approssima molto bene la spirale detta aurea: una particolare spirale logaritmica che si accresce del numero aureo ϕ ad ogni quarto di giro.

Le spirali però non sono tutte uguali: a seconda della legge scelta si possono avere spirali di Archimede, spirali di Galileo, spirali di Fermat, spirali logaritmiche, spirali iperboliche e diverse altre. Come tracciare matematicamente una spirale? Disegnando con una matita a partire da un punto centrale, basta muoverla di una distanza r e ruotare allo stesso tempo di un angoloθ, seguendo una regola che modifica r al cambiare di θ. Alcuni parametri (a, b) contribuiscono a deformare la spirale anche se la regola rimane sempre la stessa.

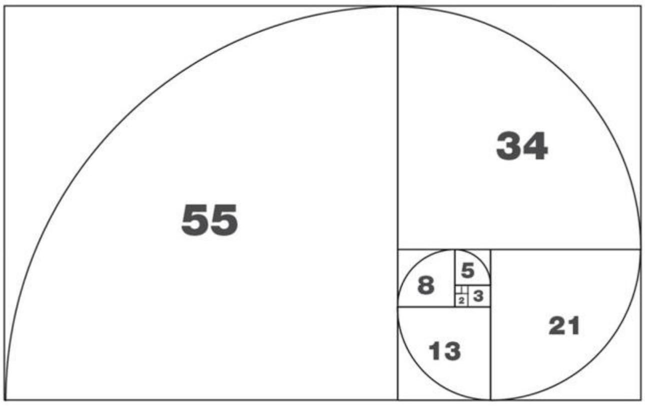
spirale logaritmica ($r = ab\theta$) spirale di Fermat ($r=a\sqrt{\theta}$)

spirale iperbolica ($r=a/\theta$)
spirale di Archimede ($r=a+b\theta$)
logarithmic spiral ($r=ab\theta$)
Fermat spiral ($r=a\sqrt{\theta}$)
hyperbolic spiral ($r=a/\theta$)



Archimedes spiral (r=a+bΘ)

b



$$\frac{a}{b} = \varphi = 1{,}618$$

Sembra che la spirale logaritmica faccia da modello, anche se sempre in modo approssimato, per moltissime strutture naturali. È una forma che ispira da secoli anche l’immaginazione di artisti e scienziati per le sue proprietà estetiche e matematiche tanto che Bernoulli la chiamò spira mirabilis e ne volle una incisa sulla sua lapide – purtroppo lo scultore ne realizzò invece una di Archimede! La spirale è una delle più affascinanti strutture che ricorrono nell’universo.

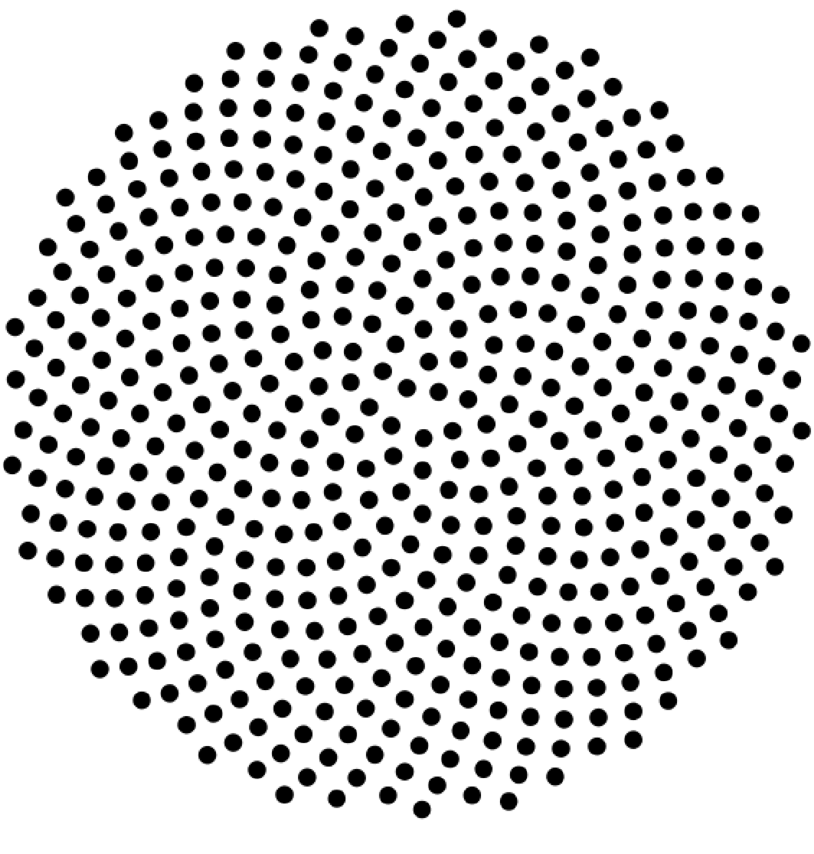
FIBONACCI NUMBERS IN NATURE

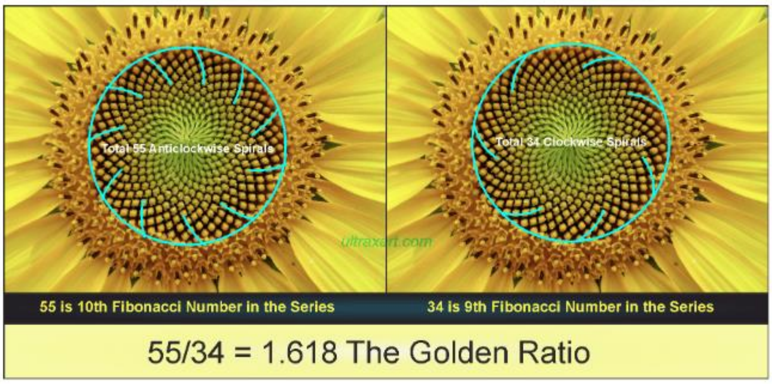
Sembra che la spirale logaritmica faccia da modello, anche se sempre in modo approssimato, per moltissime strutture naturali. È una forma che ispira da secoli anche l’immaginazione di artisti e scienziati per le sue proprietà estetiche e matematiche tanto che Bernoulli la chiamò spira mirabilis e ne volle una incisa sulla sua lapide – purtroppo lo scultore ne realizzò invece una di Archimede! La spirale è una delle più affascinanti strutture che ricorrono nell’universo.

Una delle particolarità di numeri di Fibonacci è che spesso si ritrovano in natura. Ciò che rende questa connessione interessante è che seguendo la sequenza di Fibonacci, i fiori possono massimizzare lo spazio e l'efficacia della loro esposizione alla luce solare e agli insetti impollinatori. Una disposizione di petali o semi che segue questa sequenza permette ai fiori di avere un posizionamento ottimale per catturare la luce e gli insetti da diverse angolazioni. Per le piante, portare più semi è vantaggioso perché aumenta le probabilità della specie di riprodursi. Tuttavia, è importante notare che questa regola non si applica a tutti i fiori, poiché ci sono molti fattori che influenzano il numero di petali, tra cui la genetica, l'ambiente e altre variabili.

Ad esempio:

- Nei girasoli il disco centrale (il capolino) porta una moltitudine di primordi che, maturando, diventeranno fiorellini e poi semi. Ma come si dispongono tutti questi primordi in così poco spazio? Il primo (detto apice) nasce al centro, i successivi nascono ciascuno ruotato di un certo angolo (angolo aureo di $137^\circ\ 30'$associato al numero aureo) rispetto al precedente. I semi si dispongono seguendo una struttura a spirale. Queste spirali sono legate ai numeri di Fibonacci, Inoltre, la proporzione dei semi disposti in queste spirali segue il rapporto aureo φ. Questo significa che il numero di spirali in senso orario è spesso un numero di Fibonacci, mentre il numero di spirali in senso antiorario è spesso il numero di Fibonacci successivo.



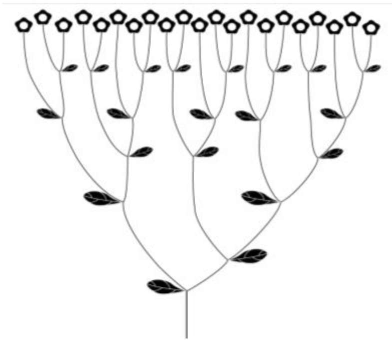


- Le margherite sono spesso citate come esempio di fiori con petali che seguono la sequenza di Fibonacci. Sono noti per avere 21 o 34 petali.
- I giacinti sono fiori a bulbo con una disposizione di 3, 5 o 8 petali
- I gigli possono avere una disposizione dei petali che si avvicina alla sequenza di Fibonacci, con 3, 5 o 8 petali.
- Le calendule sono fiori spesso con 21 o 34 petali
- Il fiore del ranuncolo può avere 5, 8 o 13 di petali
- La Achillea Ptarmica (detta anche sternutella) è una pianta che fiorisce in estate producendo tanti fiorellini bianchi, uno per ramo.Come accade spesso in natura la sua crescita sembra seguire un preciso schema: un ramo ne genera uno nuovo che dopo un mese sarà in grado di produrne un altro e così via. Quanti saranno i rami e quindi i fiorellini che compaiono dopo un anno? Un semplice schema matematico può aiutare a risolvere questo problema.

Il primo passo consiste nel disegnare uno schema semplificato della pianta con le ramificazioni mese per mese, tenendo presente che un nuovo ramo sarà in grado di sdoppiarsi solo dopo un mese. Il numero di rami aumenta velocemente e lo schema diventa presto intricato. Per capire cosa succede dopo dodici mesi, si può notare che in questo schema c'è una regola. Il numero di rami che nascono ogni mese infatti, è la somma dei rami nei due mesi precedenti:

$$21 = 13 + 8, \;\; 13 = 8 + 5, \;\; 8 = 5 + 3, \;\; 3 = 2 + 1$$

Il conto dei rami fa emergere la successione di Fibonacci.



- Le spirali si possono osservare anche in altre piante come cavolfiori, pigne, cactus.
- Conchiglie di Nautilus, code di camaleonte, galassie, foglie arrotolate, gusci di chiocciola, petali di rosa... in natura si incontrano spesso forme a spirale.

La coclea –dal latino *cochlea*, chiocciola – è una struttura che abbiamo nel nostro orecchio interno assomiglia ad una spirale. La coclea di destra presenta un avvolgimento in senso antiorario, mentre quella di sinistra in senso orario.

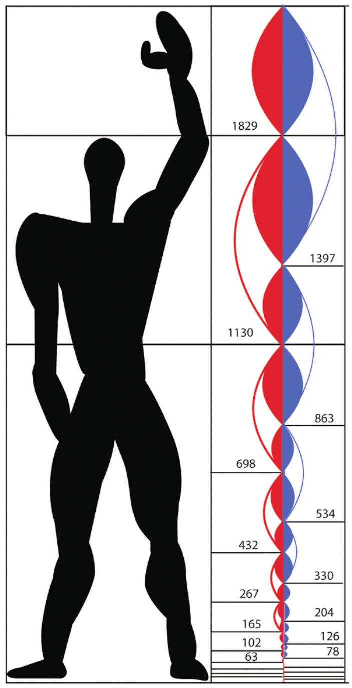
È notevole che molti numeri fra i più importanti in matematica siano irrazionali (π, e, ϕ) cioè numeri con infinite cifre decimali che continuano senza ripetersi. Sulle loro proprietà si può dire molto, qui basta precisare che la definizione di ϕ come "il più irrazionale degli irrazionali" deriva dalla difficoltà di approssimarlo con frazioni continue. Si tratta di una rappresentazione alternativa a quella decimale, più efficace per fare approssimazioni di qualsiasi numero reale con numeri razionali, che ha questo aspetto:

$$numero = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots\dots}}}$$

Dove $a_{0,1,2,3,\dots}$sono tutti interi. Più si espande la frazione, piùmigliorala precisione dell'approssimazione, come se si usasse un righello più fine per rappresentare il numero. Ogni numero reale, quindi anche irrazionale, può essere rappresentato in questo modo, ad esempio:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{\cdots\cdots}}} \qquad \varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots\cdots}}}$$

MATEMATICA E ARTE



Nel passato si è pensato che la sezione aurea avesse ispirato numerosi architetti dell'antichità e in particolari i costruttori di Partenone e Piramidi, in quanto parte di questi edifici corrispondono al rapporto espresso da questa proporzione. In verità non vi sono prove che la sezione aurea sia mai stata utilizzata di proposito nella costruzione di questi monumenti.

Più vicino ai giorni nostri, l'architetto svizzero Le Corbusier (1887-1965), basò parte della sua opera architettonica sulla serie di Fibonacci e sulla sezione aurea; creò anche un sistema di scala architettonica chiamato"Modulor". Il termine "Modulor" è una combinazione delle parole "module" (modulo) e "d'or" (d'oro), che richiama il concetto di proporzione aurea (numero aureo) nella matematica. L'obiettivo di Le Corbusier era quello di creare una scala di misure basata sulle proporzioni umane e sul concetto di armonia matematica.Questo sistema è stato utilizzato per guidare le decisioni di progettazione, come altezze dei pavimenti, altezze dei mobili, rapporti delle finestre e altro ancora. La teoria era che seguendo il Modulor, si otterrebbero spazi architettonici e design che sono piacevoli e armoniosi percepiti dalla persona che li utilizza.Il Modulor è stato applicato in vari progetti architettonici di Le Corbusier, come il "Modulor 1" e il "Modulor 2", e ha avuto un impatto significativo sul design architettonico e sulla teoria del design.

An extraordinary invention such as the Fibonacci succession finds wide application in disciplines other than mathematics, including music, where it is expressed as pure melodic nature. Assign each number a musical note: C = 1, D = 2, etc., and consider a diatonic scale of 7 notes: C-RE-MI-FA-SOL-LA-SI. Using the modulo operation, it is possible to adjust the seven natural notes to the infinite succession of numbers. With this operation, each number becomes the remainder of its division by 7.
Aad e.g. 15 = 2×7 + 1, so 15 = 1 (mod7).

Se si effettua l'operazione sul numero n-esimo mod 7 si ottengono i risultati contenuti nella tabella che segue dove è riportata la successione di Fibonacci nella prima colonna e il corrispondente numero mod 7 nella seconda.

N. succ.	N. mod 7	N. succ.	N. mod 7	N. succ.	N. mod 7
1	1	17.711	1	433.494.437	5
1	1	28.657	6	701.408.733	4
2	2	46.368	0	1.134.903.170	2
3	3	75.025	6	1.836.311.903	6
5	5	121.393	6	2.971.215.073	1
8	1	196.418	5	4.807.526.976	0
13	6	317.811	4	7.778.742.049	1
21	0	514.229	2	12.586.269.025	1
34	6	832.040	6	20.365.011.074	2
55	6	1.346.269	1	32.951.280.099	3
89	5	2.178.309	0	53.316.291.173	5
144	4	3.524.578	1	86.267.571.272	1
233	2	5.702.887	1	139.583.862.445	6
377	6	9.227.465	2	225.851.433.717	0
610	1	14.930.352	3	365.435.296.162	6
987	0	24.157.817	5	591.286.729.879	6
1.597	1	39.088.169	1	956.722.026.041	5
2.584	1	63.245.986	6	1.548.008.755.920	4
4.181	2	102.334.155	0	2.504.730.781.961	2
6.765	3	165.580.141	6	4.052.739.537.881	6
10.946	5	267.914.296	6	6.557.470.319.842	1

Si ottiene così una sequenza di numeri che variano tra 0 e 6 e che, quindi, possono essere semplicemente trasformati nelle sette note musicali come segue:

1	2	3	4	5	6	0
DO	RE	MI	FA	SOL	LA	SI

Sulla base di questa operazione è possibile costruire alcuni accordi che risuonano in modo armonico con la spirale nel nostro orecchio e richiamano un’esperienza piacevole, comprendendo note la cui posizione nella scala musicale è associata ai numeri di Fibonacci, ad es. 3-5-8. Per quei numeri non direttamente associati alla scala diatonica, si procede come segue. I numeri della successione dopo l’operazione di modulo sono dati da:

1	1	2	3	5	1	6	0	6	6	5	4	2	6	1	0
DO	DO	RE	MI	SOL	DO	LA	SI	LA	LA	SOL	FA	RE	LA	DO	SI

Sostituendo ricorsivamente, si vede che la sequenza musicale si ripete identica ogni sedici note. Si ottiene dunque una melodia che si può suonare in una sola ottava, evitando di toccare quelle note che salendo vorticosamente non risulterebbero più percettibili o comprensibili.

Altre risorse esterne:
https://emercurius.wordpress.com/2011/09/12/fra-numeri-e-musica-2/

Approfondimento informale sulla “musica” della sequenza di Fibonacci, da cui è possibile anche ascoltarla.